

Comment découper le gâteau ? ou, peut-on modéliser l'équité ?

Nadia Brauner



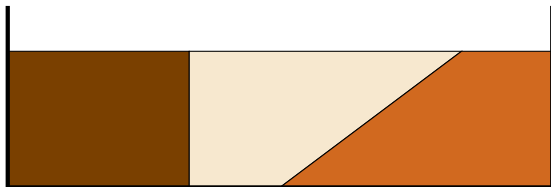
© N. Brauner, 2026

Comment découper un gâteau ?

3 gourmands se partagent un gâteau aux 3 chocolats :

noir, **blanc**, **lait**

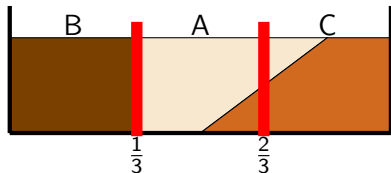
- Alice aime le gâteau et n'a pas de préférence sur le chocolat
- Bob n'aime que le chocolat noir
- Camille aime deux fois plus le chocolat noir que le chocolat au lait et n'aime pas trop le chocolat blanc



Proposez un partage du gâteau "satisfaisant"

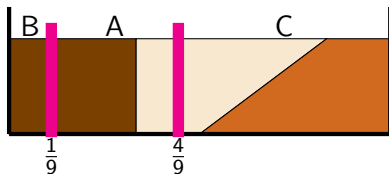
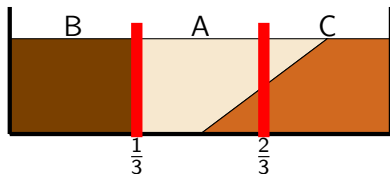
Comment découper un gâteau ?

- Alice aime le gâteau et n'a pas de préférence sur le chocolat
- Bob n'aime que le chocolat noir
- Camille aime deux fois plus le chocolat noir que le chocolat au lait et n'aime pas trop le chocolat blanc



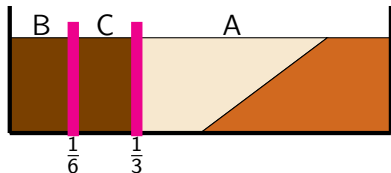
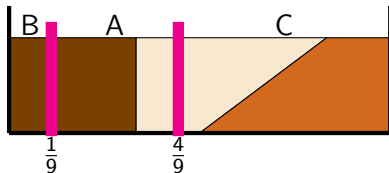
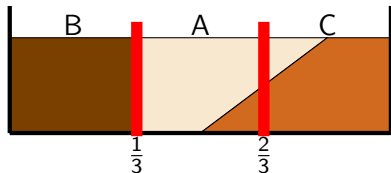
Comment découper un gâteau ?

- Alice aime le gâteau et n'a pas de préférence sur le chocolat
- Bob n'aime que le chocolat noir
- Camille aime deux fois plus le chocolat noir que le chocolat au lait et n'aime pas trop le chocolat blanc



Comment découper un gâteau ?

- Alice aime le gâteau et n'a pas de préférence sur le chocolat
- Bob n'aime que le chocolat noir
- Camille aime deux fois plus le chocolat noir que le chocolat au lait et n'aime pas trop le chocolat blanc



Plan

- 1 Modélisation
- 2 En pratique
- 3 Premiers résultats
- 4 Algorithmes
- 5 Complexité
- 6 Bien-être social et équité
- 7 Et pour finir

Plan

- 1 Modélisation
- 2 En pratique
- 3 Premiers résultats
- 4 Algorithmes
- 5 Complexité
- 6 Bien-être social et équité
- 7 Et pour finir

Modélisation

Les **joueurs** : $N = \{1, 2 \dots n\}$

[*agents*]

Modélisation

Les **joueurs** : $N = \{1, 2 \dots n\}$

[*agents*]

Le **gateau** : $[0, 1]$

[*cake*]

Modélisation

Les **joueurs** : $N = \{1, 2 \dots n\}$ *[agents]*

Le **gâteau** : $[0, 1]$ *[cake]*

Fonction d'évaluation du joueur i : $V_i(I)$

associe une valeur à chaque (ensemble de) sous-intervalle I de $[0, 1]$

$$V_i([x, y]) = V_i(x, y)$$

Modélisation

Hypothèses sur V_i

- Le gâteau entier vaut 1 : $V_i(0, 1) = 1$

Modélisation

Hypothèses sur V_i

- Le gâteau entier vaut 1 : $V_i(0, 1) = 1$
- Pas de gâteau ne vaut rien : $V_i(x, x) = 0$

Modélisation

Hypothèses sur V_i

- Le gâteau entier vaut 1 : $V_i(0, 1) = 1$
- Pas de gâteau ne vaut rien : $V_i(x, x) = 0$
- Le gâteau ne contient pas de choux de Bruxelles : $\forall I, V_i(I) \geq 0$

Modélisation

Hypothèses sur V_i

- Le gâteau entier vaut 1 : $V_i(0, 1) = 1$
- Pas de gâteau ne vaut rien : $V_i(x, x) = 0$
- Le gâteau ne contient pas de choux de Bruxelles : $\forall I, V_i(I) \geq 0$
- Plus de gâteau, vaut plus de gâteau :
 $\forall I, I' \text{ disjoints, } V_i(I) + V_i(I') = V_i(I \cup I')$

Modélisation

Hypothèses sur V_i

- Le gâteau entier vaut 1 : $V_i(0, 1) = 1$
- Pas de gâteau ne vaut rien : $V_i(x, x) = 0$
- Le gâteau ne contient pas de choux de Bruxelles : $\forall I, V_i(I) \geq 0$
- Plus de gâteau, vaut plus de gâteau :
 $\forall I, I'$ disjoints, $V_i(I) + V_i(I') = V_i(I \cup I')$
- On peut découper le gâteau :
 $\forall x, y$ et $\forall 0 \leq \lambda \leq 1, \exists z \in [x, y] / V_i(x, z) = \lambda V_i(x, y)$

Modélisation

Hypothèses sur V_i

- Le gâteau entier vaut 1 : $V_i(0, 1) = 1$
- Pas de gâteau ne vaut rien : $V_i(x, x) = 0$
- Le gâteau ne contient pas de choux de Bruxelles : $\forall I, V_i(I) \geq 0$
- Plus de gâteau, vaut plus de gâteau :
 $\forall I, I'$ disjoints, $V_i(I) + V_i(I') = V_i(I \cup I')$
- On peut découper le gâteau :
 $\forall x, y$ et $\forall 0 \leq \lambda \leq 1, \exists z \in [x, y] / V_i(x, z) = \lambda V_i(x, y)$

Modélisation

Hypothèses sur V_i

- Le gâteau entier vaut 1 : $V_i(0, 1) = 1$
- Pas de gâteau ne vaut rien : $V_i(x, x) = 0$
- Le gâteau ne contient pas de choux de Bruxelles : $\forall I, V_i(I) \geq 0$
- Plus de gâteau, vaut plus de gâteau :
 $\forall I, I' \text{ disjoints}, V_i(I) + V_i(I') = V_i(I \cup I')$
- On peut découper le gâteau :
 $\forall x, y \text{ et } \forall 0 \leq \lambda \leq 1, \exists z \in [x, y] / V_i(x, z) = \lambda V_i(x, y)$

normalisation / non-négativité / additivité / divisibilité

Un **morceau de gâteau** X : ensemble d'intervalles disjoints

$$V_i(X) = \sum_{I \in X} V_i(I)$$

Modélisation

L'aire sous la courbe d'un intervalle donne la fonction d'évaluation

Alice aime le gâteau et n'a pas
de préférence sur le chocolat

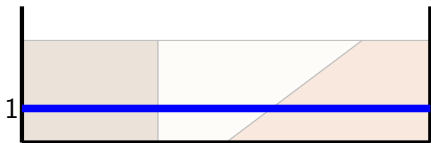
Bob n'aime que le chocolat
noir

Camille aime deux fois plus le
chocolat noir que le chocolat
au lait et n'aime pas trop le
chocolat blanc

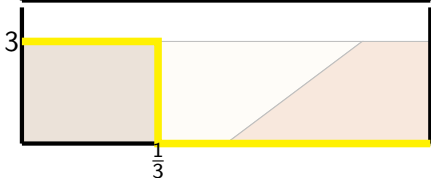
Modélisation

L'aire sous la courbe d'un intervalle donne la fonction d'évaluation

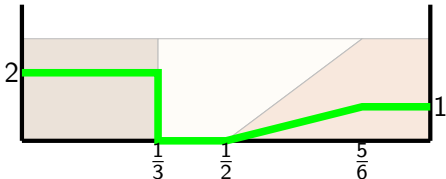
Alice aime le gâteau et n'a pas de préférence sur le chocolat



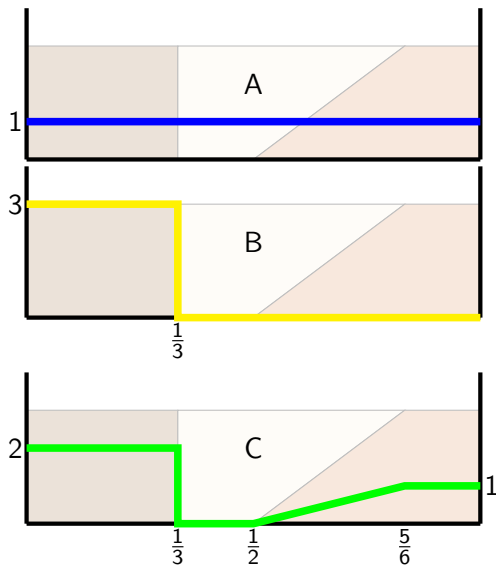
Bob n'aime que le chocolat noir



Camille aime deux fois plus le chocolat noir que le chocolat au lait et n'aime pas trop le chocolat blanc



Modélisation



Calculer...

$$V_A(0, 1)$$

$$V_A(0, \frac{1}{3})$$

$$V_A(0, \frac{1}{2})$$

$$V_A(x, y)$$

$$V_B(0, \frac{1}{3})$$

$$V_B(\frac{1}{3}, 1)$$

$$V_B(0, \frac{1}{9})$$

$$V_C(0, \frac{1}{3})$$

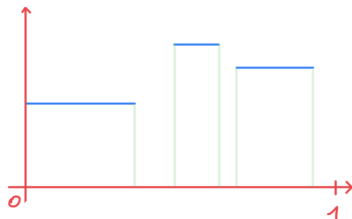
$$V_C(\frac{1}{2}, 1)$$

Modélisation

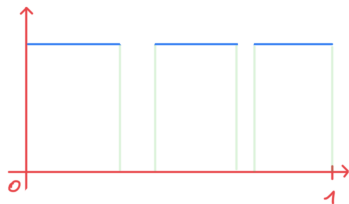
Exemples de fonctions

$$V_i(X) = \int_{x \in X} v_i(x) dx$$

Fonction de densité v_i :



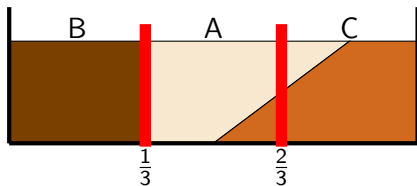
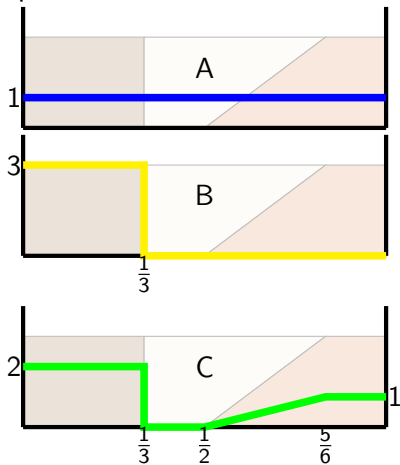
constante par morceaux



uniforme par morceaux

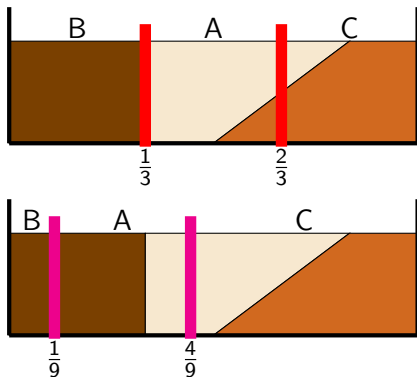
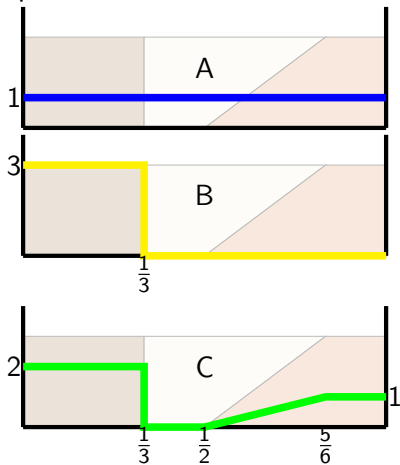
Modélisation

Quelles répartitions vous paraissent équitables ?



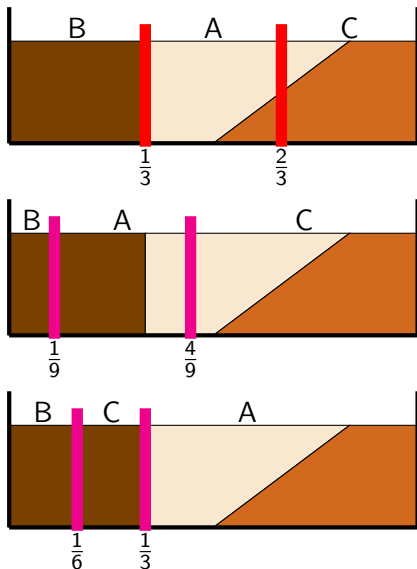
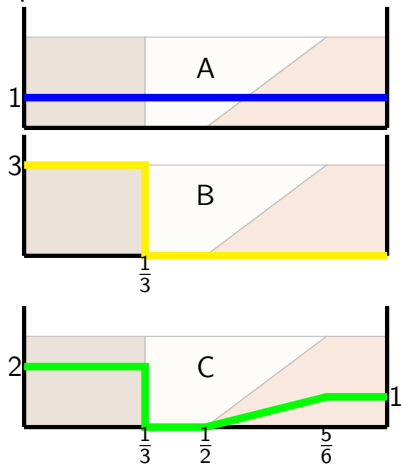
Modélisation

Quelles répartitions vous paraissent équitables ?



Modélisation

Quelles répartitions vous paraissent équitables ?



Modélisation

Découper un gâteau :

Trouver une répartition $\mathcal{G} = (G_1, G_2 \dots G_n)$ où

- G_i est le morceau de gâteau alloué au joueur i
- $\mathcal{G}$ est une partition de $[0, 1]$

“Mais j’ai fait trois parts !”

Modélisation

Découper un gâteau :

Trouver une répartition $\mathcal{G} = (G_1, G_2 \dots G_n)$ où

- G_i est le morceau de gâteau alloué au joueur i
- $\mathcal{G}$ est une partition de $[0, 1]$

“Mais j’ai fait trois parts !” Obelix

Modélisation

Modéliser l'équité

[*fairness*]

Modélisation

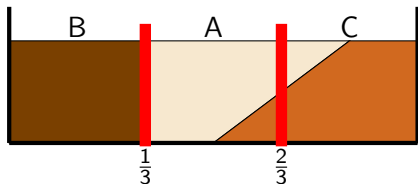
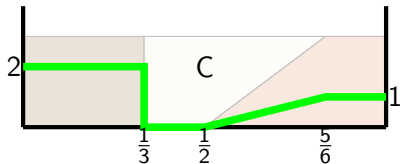
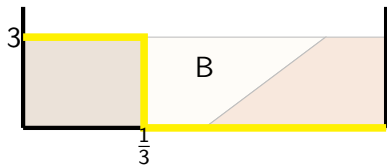
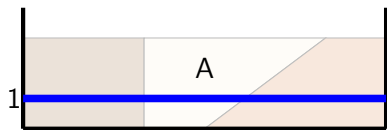
Modéliser l'équité

[*fairness*]

- **Proportionnalité** : $\forall i \in N, V_i(G_i) \geq \frac{1}{n}$
- **Sans-envie** : $\forall i, j \in N, V_i(G_i) \geq V_i(G_j)$ [envy-free]
(chaque joueur préfère son morceau à celui des autres joueurs)
- **Équitabilité** : $\forall i, j \in N, V_i(G_i) = V_j(G_j)$ [equitability]

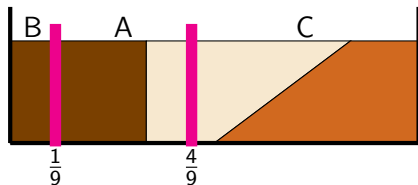
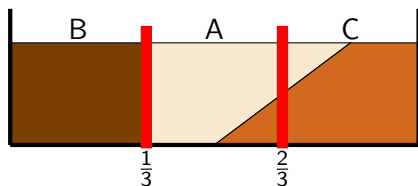
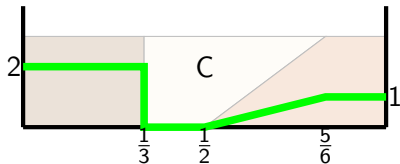
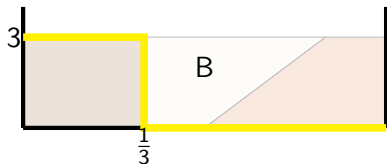
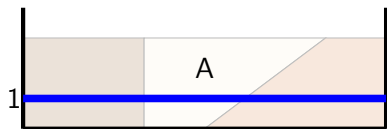
Modélisation

Des répartitions équitables ?



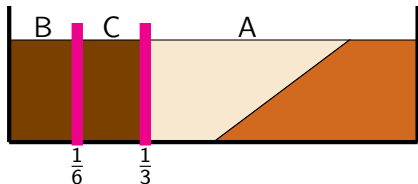
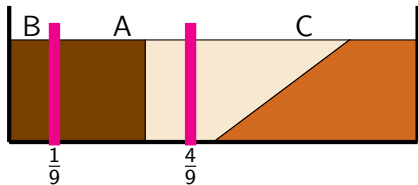
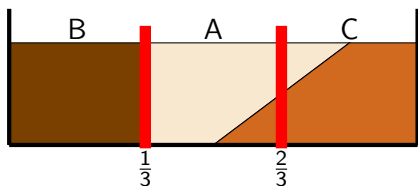
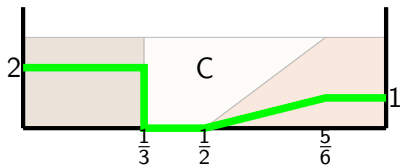
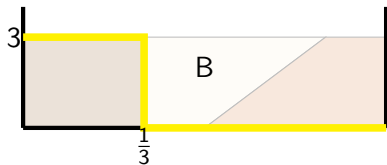
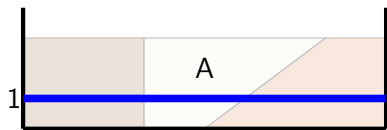
Modélisation

Des répartitions équitables ?



Modélisation

Des répartitions équitables ?



Des questions

- Quel est le lien entre les modèles d'équité ?
- Peut-on borner le nombre de découpe ?
- Trouver un algorithme constructif de répartition équitable
- Cet algorithme est-il manipulable ?
- Quelle est la complexité d'un meilleur algorithme de répartition équitable ?
- Est-ce que prendre des fonctions uniformes par morceau simplifie le problème ?
- Quel est le prix de l'équité par rapport au bien être social ?

Plan

- 1 Modélisation
- 2 En pratique
- 3 Premiers résultats
- 4 Algorithmes
- 5 Complexité
- 6 Bien-être social et équité
- 7 Et pour finir

En pratique

Partager entre 2 joueurs

En pratique

Partager entre 2 joueurs

Un premier algorithme : "**Je partage, tu choisis**"

- Le premier joueur coupe le gâteau en deux parts qu'il considère comme égales
- Le deuxième joueur choisit sa part préférée

Est-ce équitable ?

Est-ce manipulable ?

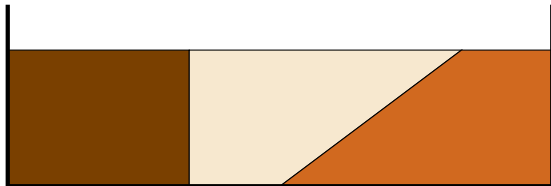
En pratique

Un algorithme de partage à 3 joueurs

En pratique

Un algorithme de partage à 3 joueurs

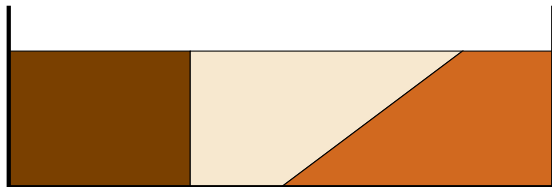
- Une main pure et innocente positionne un couteau au point zéro et le déplace doucement sur le gâteau



En pratique

Un algorithme de partage à 3 joueurs

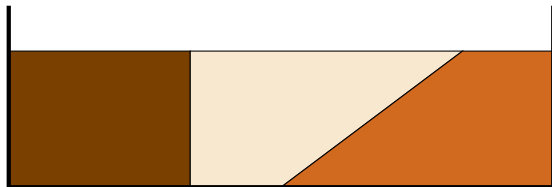
- Une main pure et innocente positionne un couteau au point zéro et le déplace doucement sur le gâteau
- Dès qu'un joueur considère que la part délimitée par le départ du couteau et son point courant vaut $\frac{1}{3}$ pour son évaluation, il crie STOP et obtient cette part



En pratique

Un algorithme de partage à 3 joueurs

- Une main pure et innocente positionne un couteau au point zéro et le déplace doucement sur le gâteau
- Dès qu'un joueur considère que la part délimitée par le départ du couteau et son point courant vaut $\frac{1}{3}$ pour son évaluation, il crie STOP et obtient cette part
- Les joueurs restants répètent l'opération jusqu'à épuisement des joueurs et du gâteau



En pratique

Un algorithme de partage à 3 joueurs

- Une main pure et innocente positionne un couteau au point zéro et le déplace doucement sur le gâteau
- Dès qu'un joueur considère que la part délimitée par le départ du couteau et son point courant vaut $\frac{1}{3}$ pour son évaluation, il crie STOP et obtient cette part
- Les joueurs restants répètent l'opération jusqu'à épuisement des joueurs et du gâteau

En pratique

Un algorithme de partage à 3 joueurs

- Une main pure et innocente positionne un couteau au point zéro et le déplace doucement sur le gâteau
- Dès qu'un joueur considère que la part délimitée par le départ du couteau et son point courant vaut $\frac{1}{3}$ pour son évaluation, il crie STOP et obtient cette part
- Les joueurs restants répètent l'opération jusqu'à épuisement des joueurs et du gâteau

Des questions

- Est-ce équitable ?

En pratique

Un algorithme de partage à 3 joueurs

- Une main pure et innocente positionne un couteau au point zéro et le déplace doucement sur le gâteau
- Dès qu'un joueur considère que la part délimitée par le départ du couteau et son point courant vaut $\frac{1}{3}$ pour son évaluation, il crie STOP et obtient cette part
- Les joueurs restants répètent l'opération jusqu'à épuisement des joueurs et du gâteau

Des questions

- Est-ce équitable ?
- Est-ce que cet algorithme se généralise à n joueurs ?

En pratique

Un algorithme de partage à 3 joueurs

- Une main pure et innocente positionne un couteau au point zéro et le déplace doucement sur le gâteau
- Dès qu'un joueur considère que la part délimitée par le départ du couteau et son point courant vaut $\frac{1}{3}$ pour son évaluation, il crie STOP et obtient cette part
- Les joueurs restants répètent l'opération jusqu'à épuisement des joueurs et du gâteau

Des questions

- Est-ce équitable ?
- Est-ce que cet algorithme se généralise à n joueurs ?
- Est-ce qu'il reste quelque chose à manger pour le dernier ?

En pratique

Un algorithme de partage à 3 joueurs

- Une main pure et innocente positionne un couteau au point zéro et le déplace doucement sur le gâteau
- Dès qu'un joueur considère que la part délimitée par le départ du couteau et son point courant vaut $\frac{1}{3}$ pour son évaluation, il crie STOP et obtient cette part
- Les joueurs restants répètent l'opération jusqu'à épuisement des joueurs et du gâteau

Des questions

- Est-ce équitable ?
- Est-ce que cet algorithme se généralise à n joueurs ?
- Est-ce qu'il reste quelque chose à manger pour le dernier ?
- Est-ce qu'un joueur peut mentir pour avoir plus ?

En pratique

Un algorithme de partage à 3 joueurs

- Une main pure et innocente positionne un couteau au point zéro et le déplace doucement sur le gâteau
- Dès qu'un joueur considère que la part délimitée par le départ du couteau et son point courant vaut $\frac{1}{3}$ pour son évaluation, il crie STOP et obtient cette part
- Les joueurs restants répètent l'opération jusqu'à épuisement des joueurs et du gâteau

Des questions

- Est-ce équitable ?
- Est-ce que cet algorithme se généralise à n joueurs ?
- Est-ce qu'il reste quelque chose à manger pour le dernier ?
- Est-ce qu'un joueur peut mentir pour avoir plus ?
- Est-ce que ce partage est sans-envie ? Pour qui ?

Allocation de ressources temporelle

- Faire l'emploi du temps d'une promo (qui veut le vendredi après-midi ?)
- Allouer du temps de télescope à des astronomes
- Satisfaire des requêtes d'observation par des satellites d'observation de la Terre en lumière visible haute définition (thèse Sylvain Bouveret, seuils pour l'utilité)
- Allouer des slots de pub (enfants, sportifs...)
- Accéder à l'unique prise d'une salle de TD pour recharger les téléphones et ordinateurs

En pratique

Partage de territoires

- Partager des terres : Abraham et Lot se séparent dans la Génèse (questions de continuité)
- Partager un gâteau 2D avec des parts rectangulaires...

En pratique

Partage de territoires

- Partager des terres : Abraham et Lot se séparent dans la Génèse (questions de continuité)
- Partager un gâteau 2D avec des parts rectangulaires...

Divisible ou Indivisible ? Discret ou **Continu** ?

Contraintes additionnelles

Jouer avec des applications : <http://www.spliddit.org/>

En pratique

Attribution des zones minières dans les océans internationaux

Convention des Nations Unies sur le droit de la mer

annexe III, article 8

d'après Young 1995 et Walsh 2011

Article 8

Réservation de secteurs

Chaque demande, autre que celles présentées par l'Entreprise ou par toutes autres entités ou personnes et portant sur des secteurs réservés, doit couvrir une zone, pas nécessairement d'un seul tenant, ayant une superficie totale et une valeur commerciale estimative suffisantes pour permettre deux opérations d'extraction minière. Le demandeur indique les coordonnées permettant de diviser la zone en deux parties de valeur commerciale estimative égale et communique toutes les données qu'il a recueillies pour les deux parties de la zone. Sans préjudice des pouvoirs que détient l'Autorité en application de l'article 17 de la présente annexe, les données qui doivent lui être communiquées en ce qui concerne les nodules polymétalliques portent sur les levés, les échantillons, la concentration de nodules et les métaux qu'ils contiennent. Dans les 45 jours suivant la réception de ces données, l'Autorité désigne la partie qui sera réservée exclusivement à des activités qu'elle mènera par l'intermédiaire de l'Entreprise ou en association avec des Etats en développement. Cette désignation peut être différée de 45 jours supplémentaires si l'Autorité charge un expert indépendant de déterminer si toutes les données requises par le présent article lui ont été communiquées. Le secteur désigné devient un secteur réservé dès que le plan de travail concernant le secteur non réservé est approuvé et le contrat signé.

En pratique

Attribution des zones minières dans les océans internationaux

Convention des Nations Unies sur le droit de la mer

annexe III, article 8

d'après Young 1995 et Walsh 2011

Simulation d'un algorithme sans envie sur des conflits internationaux :

- les accords de camp David (Brams et Togman 1996)
- la controverse sur les îles Spratly (Brams et Denoon 1997)
- le conflit israélo-palestinien (Massoud 2000)

Plan

- 1 Modélisation
- 2 En pratique
- 3 Premiers résultats**
- 4 Algorithmes
- 5 Complexité
- 6 Bien-être social et équité
- 7 Et pour finir

Premiers résultats

Comparaison des critères

Sans-envie $\Rightarrow$ Proportionnalité



Si le partage est sans envie, alors pour tout $i \in N$ et $j \in N$, on a $V_i(G_i) \geq V_i(G_j)$. En sommant sur j ces n inégalités et en se rappelant que le gâteau total vaut 1 pour le joueur i , on obtient :

$$n * V_i(G_i) = \sum_{j=1}^n V_i(G_i) \geq \sum_{j=1}^n V_i(G_j) = 1$$

et donc $V_i(G_i) \geq \frac{1}{n}$ ce qui prouve que le partage est proportionnel.

Premiers résultats

Comparaison des critères

Sans-envie $\Rightarrow$ Proportionnalité



L'inverse est vrai pour

Premiers résultats

Comparaison des critères

Sans-envie $\Rightarrow$ Proportionnalité



L'inverse est vrai pour deux joueurs ($n = 2$)



Et faux pour $n \geq 3$ joueurs



Équitabilité n'est pas comparable aux deux autres



Comparaison des critères¹

It is easy to see that envy-freeness implies proportionality. Indeed, by additivity $\sum_{j \in N} V_i(A_j) = 1$, so there must exist $j \in N$ such that $V_i(A_j) \geq 1/n$. Using envy-freeness we have that $V_i(A_i) \geq V_i(A_j)$, and therefore $V_i(A_i) \geq 1/n$. The converse is true for the case of two agents, because $V_i(A_i) \geq 1/2$ and $V_i(A_i) + V_i(A_{3-i}) = 1$ together imply that $V_i(A_i) \geq V_i(A_{3-i})$. However, for three agents there are allocations that are proportional but not envy-free: An agent can have value $1/3$ for its own piece, satisfying proportionality, but a value of $1/2$ for another piece, violating envy-freeness. It is also worth mentioning that equitability is incomparable to the other two properties: An allocation where each agent assigns value 0 to its own piece and value 1 to another piece is equitable but not proportional (and hence not envy-free), while most envy-free (and hence proportional) allocations would not satisfy the stringent equality constraint that equitability requires.

1. Les textes encadrés sont des captures d'écran du chapitre de Procaccia

Premiers résultats

Un théorème d'existence non constructif

(Alon 1987)

Si les V_i sont induites par des fonctions de densité continues, alors il existe une découpe en $n^2 - n$ points qui donne une partition telle que $\forall i, j, V_i(G_j) = \frac{1}{n}$.

Version continue du problème de **découpe de collier** : On veut partager un collier avec t types de perles qui contient ka_i perles de type i entre k voleurs. Il est possible de reconstruire une partition où chaque classe a exactement a_i perles de type i en coupant le collier en au plus $(k - 1)t$ endroits.

De très beaux résultats de topologie (Théorem de Borsuk-Ulam)

3Blue1Brown : <https://youtu.be/yuVqxCSsE7c>

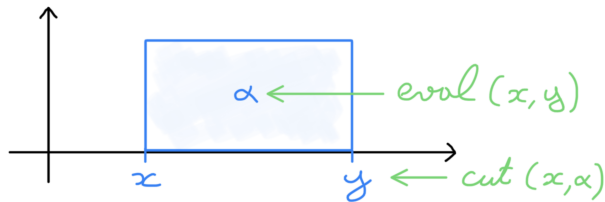
Plan

- 1 Modélisation
- 2 En pratique
- 3 Premiers résultats
- 4 Algorithmes**
- 5 Complexité
- 6 Bien-être social et équité
- 7 Et pour finir

Algorithmes

2 types de requêtes

- $eval_i(x, y)$ renvoie $V_i(x, y) = \alpha$
- $cut_i(x, \alpha)$ renvoie le point le plus à gauche où couper en partant de x pour une valeur de α : $V_i(x, cut_i(x, \alpha)) = \alpha$



Modèle de Robertson et Webb 1998

Algorithmes

2 joueurs

Algorithmes

2 joueurs

Algorithme “je partage, tu choisis”

- Soit $x = cut_1(0, \frac{1}{2})$
- si $eval_2(0, x) \geq eval_2(x, 1)$ alors $G_2 = [0, x]$ et $G_1 = [x, 1]$
- sinon, $G_2 = [x, 1]$ et $G_1 = [0, x]$

Algorithmes

2 joueurs

Algorithme “je partage, tu choisis”

- Soit $x = cut_1(0, \frac{1}{2})$
- si $eval_2(0, x) \geq eval_2(x, 1)$ alors $G_2 = [0, x]$ et $G_1 = [x, 1]$
- sinon, $G_2 = [x, 1]$ et $G_1 = [0, x]$

- Proportionnel
- Sans-envie ☐
- Fonctionne même si l'un des deux joueurs ne joue pas honnêtement (robuste à la manipulation) ☐

Algorithmes

n joueurs, proportionnalité

Algorithmes

n joueurs, proportionnalité

Algorithme constructif de Dubins et Spanier 1961

Le joueur i^* avec la plus petite valeur de $x_i = cut_i(0, \frac{1}{n})$ sort avec le morceau $[0, x_{i^*}]$.

On répète avec les joueurs restants et le gâteau restant.

Algorithmes

n joueurs, proportionnalité

Algorithme constructif de Dubins et Spanier 1961

Le joueur i^* avec la plus petite valeur de $x_i = cut_i(0, \frac{1}{n})$ sort avec le morceau $[0, x_{i^*}]$.

On répète avec les joueurs restants et le gâteau restant.

- $n - 1$ découpes
- respecte la proportionnalité □
- sans-envie par rapport à ceux qui ont pris leur part avant mais pas par rapport à ceux qui prennent leur part après.
- quel est le lien avec le couteau qui se déplace ?

Algorithme de Even et Paz 1984 (*divide and conquer*)

n joueurs, proportionnalité

Each agent $i \in N$ that exits during the execution of the algorithm receives a piece A_i such that $V_i(A_i) = 1/n$. The proportionality guarantee is also satisfied with respect to the last agent j , because $V_j(A_i) \leq 1/n$ for all $i \in N \setminus \{j\}$, and hence $V_j(A_j) \geq 1 - (n - 1)/n = 1/n$.

Algorithmes

$n = 3$ joueurs, sans-envie



Algorithme constructif de Selfridge et Conway (indép.) 1960

<https://youtu.be/-Yk00LPdH48?t=58>

Algorithmes

n joueurs, sans-envie

Algorithme de **Brams et Taylor 1995** :

non borné : $n \geq 4$, $\forall k$, $\exists V_i$ tel que l'algorithme nécessite k requêtes

La vidéo précédente annonce un résultat de 2016 qui montre qu'on peut borner le nombre de découpes en une fonction de n

$$n^{n^{n^{n^n}}}$$

Plan

- 1 Modélisation
- 2 En pratique
- 3 Premiers résultats
- 4 Algorithmes
- 5 Complexité**
- 6 Bien-être social et équité
- 7 Et pour finir

Complexité

Complexité dans le Modèle de Robertson et Webb 1998 :

$eval_i(x, y)$ et $cut_i(x, \alpha)$

Proportionnel

- Dubins Spanier : n^2
- Even Paz : $n \log(n)$
- Toute découpe proportionnelle du gâteau nécessite au moins de l'ordre de $n \log(n)$ requêtes

Sans-envie

- Tout algorithme de découpe sans-envie nécessite au moins de l'ordre de n^2 requêtes (Proccacia 2009)
- Prendre des fonctions de densité uniformes par morceau ne simplifie pas le problème (Kurokawa et al. 2013)

Complexité

ϵ -sans-envie : $V_i(G_i) \geq V_i(G_j) - \epsilon$

Algorithme simple



Preuve pas compliquée



Pendant continu de l'absence d'envie *up-to-one-good* en partage discret

Complexité

$$\epsilon\text{-sans-envie} : V_i(G_i) \geq V_i(G_j) - \epsilon$$

In order to conclude this section on a positive note, we next relax the envy-freeness requirement, instead asking for ϵ -envy-freeness: $V_i(A_i) \geq V_i(A_j) - \epsilon$ for all $i, j \in N$. Despite the difficulties we have discussed, it turns out that this natural relaxation can be solved by a very simple, computationally efficient algorithm. First, the algorithm asks each agent $i \in N$ to cut the cake into $\lceil 1/\epsilon \rceil$ disjoint intervals worth ϵ each (except for maybe the rightmost interval, which is worth at most ϵ); this step requires roughly n/ϵ cut queries. Next the algorithm sorts the cut points made by all the agents, and asks each agent to evaluate each interval between two adjacent cut points; this step requires roughly n^2/ϵ eval queries.

Complexité

$$\epsilon\text{-sans-envie} : V_i(G_i) \geq V_i(G_j) - \epsilon$$

We claim that at this point the algorithm has sufficient information to compute an ϵ -envy-free allocation. Indeed, we can treat the intervals between adjacent cut points as indivisible goods where, crucially, each good is worth at most ϵ to *any* agent. The goods are allocated in a round-robin fashion: each of the agents $1, 2, \dots, n$ selects its most preferred good in that order, and we repeat this process until all the goods have been selected. To see why this allocation is ϵ -envy-free consider an agent $i \in N$, and consider the sequence of choices starting from the first time i selected a good: $i, i + 1, \dots, n, 1, \dots, i - 1, i, \dots, i - 1, \dots$. In each subsequence $i, \dots, i - 1$, i prefers its own good to the goods selected by other agents. The only potential source of envy is the selections made by agents $1, \dots, i - 1$ before i first selected a good, but these agents received one good each in this phase, and $V_i(g) \leq \epsilon$ for each good g .

Plan

- 1 Modélisation
- 2 En pratique
- 3 Premiers résultats
- 4 Algorithmes
- 5 Complexité
- 6 Bien-être social et équité**
- 7 Et pour finir

Bien-être social et équité

Bien être social

[*Social Welfare*]

Trouver G^* qui maximise

$$sw(G) = \sum_{i \in N} V_i(G_i)$$

Compromis entre le bien-être social et l'équité individuelle ?

Approche utilitariste

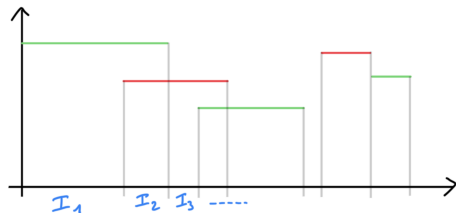
Bien-être social et équité

Algorithme qui

- calcule une répartition qui maximise le bien-être social
- sous contraintes d'équité
- V_i entièrement connues par l'algorithme

Pour simplifier : constantes par morceaux

$\mathcal{I}$ ensemble d'intervalles sur lesquels toutes les V_i sont constantes qui partitionnent $[0,1]$



Bien-être social et équité

Calculer une répartition proportionnelle ou sans envie

Bien-être social et équité

Calculer une répartition proportionnelle ou sans envie

Algorithme :

- Partitionner chaque $I \in \mathcal{I}$ en n morceaux identiques
- Donner un morceau à chaque joueur

Bien-être social et équité

Calculer une répartition proportionnelle ou sans envie

Algorithme :

- Partitionner chaque $I \in \mathcal{I}$ en n morceaux identiques
- Donner un morceau à chaque joueur

Chaque morceau de I a une valeur $\frac{1}{n} V_i(I)$ pour le joueur i

$$V_i(G_j) = \frac{1}{n} \sum_{I \in \mathcal{I}} V_i(I) = \frac{1}{n}$$

Donc équitable quel que soit le critère

Bien-être social et équité

Calculer une répartition proportionnelle ou sans envie

Si G_j a une fraction f_I^j de l'intervalle $I \in \mathcal{I}$ alors

$$V_i(G_j) = \sum_{I \in \mathcal{I}} f_I^j V_i(I)$$

Bien-être social et équité

Programme linéaire

Cohler et al. 2011

pour calculer la solution optimale
en respectant une contrainte d'équité.

$$\max \sum_{i=1}^n \sum_{l \in \mathcal{I}} f_l^i V_i(l)$$

$$\sum_{i=1}^n f_l^i \leq 1 \quad \forall l \in \mathcal{I}$$

$$\sum_{l \in \mathcal{I}} f_l^i V_i(l) \geq \frac{1}{n} \quad \forall i \in N$$

$$f_l^i \geq 0 \quad \forall i \in N, l \in \mathcal{I}$$

Bien-être social et équité

Si on demande des répartitions proportionnelles et continues, calculer le bien être social devient NP-difficile.

Bei et al. 2012

Bien-être social et équité

Prix de l'équité

pire cas de $\frac{sw(G \text{ optimal})}{sw(G \text{ optimal parmi les équitables})}$

- Proportionnalité en $O(\sqrt{n})$
 - borne sup : réallouer optimal
 - borne inf : instance qui atteint
- Sans-envie : entre $O(\sqrt{n})$ et $O(n)$



Bien être social et équité

Brahms et al. 2012

v_i constantes par morceaux

- G^* optimal équitale
- G^{**} optimal sans-envie
- $sw(G^*) \leq sw(G^{**})$

Plan

- 1 Modélisation
- 2 En pratique
- 3 Premiers résultats
- 4 Algorithmes
- 5 Complexité
- 6 Bien-être social et équité
- 7 Et pour finir

Et en pratique ?

Expérience en laboratoire

Kyropoulou et al. 2022

- Plusieurs procédures de partage humains/robots ou humains/humains avec garanties théoriques sur l'équité
- Quantifier dans quelle mesure des propriétés d'équité théoriques plus fortes correspondent à une "meilleure" performance en pratique
- Etudier le comportement stratégique des agents (mensonge sur les préférences)
- Etudier l'apprentissage dans un jeu répété

Et en pratique ?

Résultats

Kyropoulou et al. 2022

Et en pratique ?

Résultats

Kyropoulou et al. 2022

- Dans un jeu répété, les joueurs apprennent les préférences de leurs opposant et utilisent cette information pour tenter d'améliorer leur part de gâteau : l'apprentissage augmente les comportements stratégiques mais réduit l'envie.

Et en pratique ?

Résultats

Kyropoulou et al. 2022

- Dans un jeu répété, les joueurs apprennent les préférences de leurs opposant et utilisent cette information pour tenter d'améliorer leur part de gâteau : l'apprentissage augmente les comportements stratégiques mais réduit l'envie.
- *"Subjects manipulate (often unsuccessfully) all the division procedures. Envy-free procedures are significantly less manipulated than proportional ones. Strategic behavior increases with learning"*
- *"Envy-free procedures generate allocations with envy, but less than non-envy-free procedures. Envy decreases with learning."*

Et pour finir

Fair Division of a Graph

Sylvain Bouveret, Katarína Cechlárová, Edith Elkind, Ayumi Igarashi, Dominik Peters 2017

- Les sommets sont des objets
- les agents ont des préférences sur les objets
- Trouver une partition du graphe en sous-graphes connexes entre les agents la plus équitable possible.
- Si le graphe est une chaîne : on ne peut couper qu'à des endroits précis du gâteau

Et pour finir

dans la littérature :

- *How to cut the cake ?*
- Répartition équitable de biens divisibles
- *Fair allocation of divisible goods*

Et pour finir

dans la littérature :

- *How to cut the cake ?*
- Répartition équitable de biens divisibles
- *Fair allocation of divisible goods*

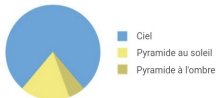
Le gâteau est aux carottes et aux noix. Il est plus craquant sur le bord et il est plus fondant au centre... : il est hétérogène.



Et pour finir

D'autres façons de découper un gâteau

World's Most Accurate Pie Chart



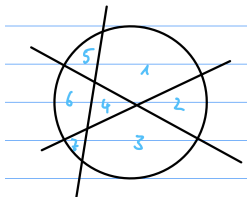
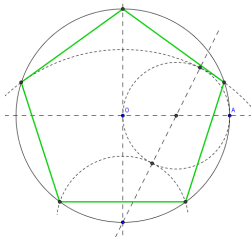
Et pour finir

D'autres façons de découper un gâteau

World's Most Accurate Pie Chart



- Ciel
- Pyramide au soleil
- Pyramide à l'ombre



ElJj, c'est pas de la tarte, 2007

Moritz Muhlenenthaler

Et pour finir

Le je partage, tu choisis symétrique

$n = 2$

- Chaque joueur i indique la valeur de x_i telle que $v_i(0, x_i) = v_i(x_i, 1) = \frac{1}{2}$
- On suppose $x_1 \leq x_2$
- Le joueur 1 reçoit $\left[0, \frac{x_1+x_2}{2}\right]$
- Le joueur 2 reçoit $\left[\frac{x_1+x_2}{2}, 1\right]$

Comment découper le gâteau ? ou, peut-on modéliser l'équité ?

Nadia Brauner

Source : "Cake Cutting Algorithms", Ariel Procaccia, chap 13
Handbook of Computational Social Choice

Brandt, Conitzer, Endriss, Lang, Procaccia 2016

Merci à Nicolas Maudet, Fanny Pascual et Sylvain Bouveret pour
les références et corrections